

## Examens de maturité 2017

Applications des mathématiques

OS

5D

Version B

### Problème 1

On considère l'équation différentielle du premier ordre  $y' = \frac{2y}{x}$  et on appelle  $s$  la solution qui satisfait la condition  $s(1) = 1$ .

On se propose de comparer les résultats obtenus par les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta 4 pour la résolution de cette équation.

- Déterminer la solution  $s(x)$  de cette équation différentielle avec cette condition initiale. Puis tracer cette courbe dans un repère orthonormé.
- Calculer deux estimations de  $s(3)$ , la première en employant la méthode d'Euler avec un pas  $h = 1$  et la deuxième en employant la méthode de Runge-Kutta 4 avec un pas  $h = 2$ . Avec quelle méthode obtient-on le résultat le plus précis ?
- Dans le même repère que pour la question 1, représenter graphiquement les résultats obtenus en reportant et reliant les points calculés pour les deux méthodes de la question 2.
- Déterminer l'erreur relative de la méthode de Runge-Kutta 4 avec le pas  $h = 2$ .
  - Quelle serait-elle, en théorie, si on prenait un pas de  $h = 1$  ?
  - Contrôler le résultat précédent par calcul.

### Problème 2

On a relevé les débits d'eau d'une rivière après l'apparition du pic de débit :

Minutes après le pic	23	38	62	95	126	154	190	225
Débits (l/s)	77.78	55.42	36.21	22.33	12.27	10.24	6.73	3.92

On admet que le débit  $D(t)$  est donné par la relation  $D(t) = D_0 \cdot e^{\frac{k}{2}t}$

- Déterminer  $D_0$  et  $k$  après avoir linéarisé les données.
- Après combien de minutes, le débit ne sera-t-il plus que de 1 litre par seconde ?
- Quel devrait être le débit, selon le modèle trouvé, 3h après l'apparition du pic ?

### Problème 3

Nous disposons des mesures suivantes concernant la teneur en particules fines (PM10) de l'air :

Heure	11	12	13	14	15	16	17	18	19
PM10 ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )	12.3	9	9.9	11.2	25.8	23.2	25.7	24	15.7

- Déterminer la concentration de particules fines en  $\mu\text{g}/\text{m}^3$  à 16h24 à l'aide d'une interpolation linéaire.
- Interpoler la concentration de PM10 à la même heure, mais avec une interpolation cubique cette fois-ci,
- Procéder à une intégration entre 11h et 19h à l'aide de l'ensemble des points.
  - en utilisant la méthode des rectangles (considérer dans chaque rectangle la valeur interpolée du milieu de l'intervalle).
  - à l'aide de la méthode de Simpson.
- Déduire, dans chaque cas, une estimation de la concentration moyenne de particules fines entre 11h et 19h.

### Problème 4

Une entreprise produit trois sortes de chaises  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  qui nécessitent chacune l'utilisation de trois ateliers  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Le temps de passage (en heure) dans chaque atelier, la disponibilité (en heure) ainsi que le bénéfice (en CHF) sont résumés dans le tableau suivant :

	A	B	C	Bénéfice
$C_1$	2	1	4	5.-
$C_2$	2	5	3	2.-
$C_3$	4	1	1	3.-
Disponibilité	800	550	480	

- Donner le système d'inéquations régissant ce problème ainsi que la fonction économique.
- Utiliser la méthode du simplexe pour déterminer le nombre de chaises de chaque sorte à produire pour que le bénéfice soit maximal. Quelle est la valeur du bénéfice obtenu ?
- Indiquer les éventuelles ressources restantes ainsi que leur quantité.

FIN