*Applications des mathématiques* *OS* *classe 5C, groupe 2*

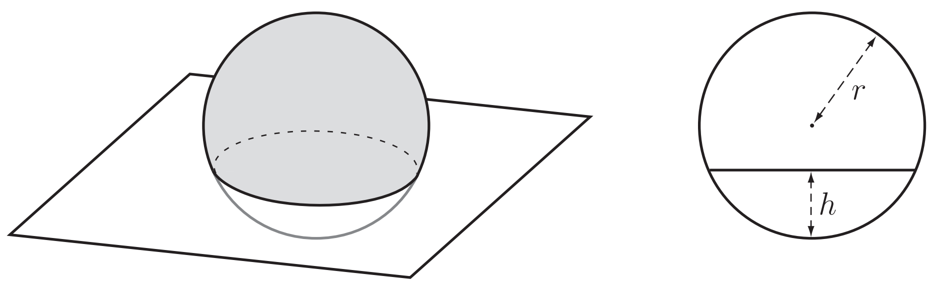
---

**Problème 1**

Une boule homogène de rayon $r$ et de masse volumique $\rho$ flotte à la surface de l'eau. On note $h$ la profondeur d'immersion de la boule.

1. Établir la relation $h^3 - 3rh^2 + 4\,\dfrac{\rho}{\rho_{\text{eau}}}\,r^3 = 0$ avec $\rho_{\text{eau}} = 10^3$ kg/m$^3$.

   *Indication : égaler le poids de la boule et la poussée d'Archimède donnée par la formule $F_A = \rho_{eau}\, g\, V_{im}$. Le volume immersé est celui d'une calotte.*




2. On pose $r = 1$ m et $\rho = 750$ kg/m$^3$.
   (a) Montrer que la fonction $f\colon x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3$ admet trois solutions réelles (sans les calculer). Quelle est celle qui fournit la profondeur d'immersion $h$ de la boule ? Justifier toutes les réponses.
   (b) Montrer que la fonction $f$ vérifie les hypothèses du théorème de Fourier sur l'intervalle $I = [1.2\,;1.8]$ avec $x_0 = 1.2$.
   (c) Calculer trois termes de la suite de Newton qui converge vers une solution de l'équation $f(x) = 0$. Sachant que la convergence est quadratique, donner une valeur très précise du zéro de $f$ et une estimation de l'erreur.

## Problème 2

Dans un projet de la FAO (Food and Agriculture Organization) voulant estimer les stocks de poissons tropicaux, on cherchait à calculer la relation taille-poids chez le *Nemipterus marginatus*, un poisson de la mer de Chine méridionale. Le tableau suivant contient un extrait des données originales des archives de la FAO.

| taille $L$ (cm) | 8.1 | 11.9 | 13.8 | 17.7 | 20.6 |
|---|---|---|---|---|---|
| poids $W$ (g) | 6.3 | 18.5 | 36.1 | 69.4 | 106.6 |

La relation entre le poids ($W$) et la longueur ($L$) d'un poisson s'écrit $W = \alpha \cdot L^{\beta}$.

1. Montrer qu'en posant $y = \ln(W)$ et $x = \ln(L)$ on peut linéariser cette loi.
2. Déterminer la droite de régression de $y$ en $x$. Calculer le coefficient de corrélation et interpréter le résultat.
3. En déduire les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ et estimer le poids d'un poisson de 15 cm de long.
4. Expliquer pourquoi la valeur obtenue pour $\beta$ est plausible. Donner ensuite une interprétation de la valeur de $\alpha$.

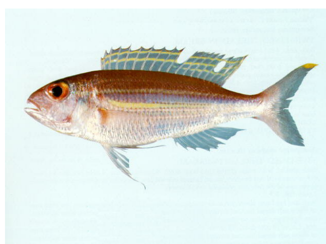


*Fig : Nemipterus marginatus*

## Problème 3

Dans un article paru en 1895, Carl David Runge proposa la résolution numérique de l'équation différentielle

$$y' = \frac{y - x}{y + x} \qquad \text{avec} \quad y(0) = 1$$

1. Résoudre cette équation différentielle homogène de manière exacte et expliquer pourquoi la solution trouvée ne permet pas de calculer $y(x)$.
2. Calculer les valeurs approximatives de $y(1)$ fournies par les algorithmes d'Euler et de Heun avec un pas de longueur 1.
3. Écrire une fonction `RK4(n:Integer):Real` qui calcule la valeur approximative de $y(1)$ selon la méthode de Runge-Kutta 4 pour une subdivision de l'intervalle $[0\,;1]$ en $n$ segments de même longueur.
4. Utiliser cette fonction dans un programme qui calcule $y(1)$ avec une erreur relative inférieure à $10^{-5}$.